Mécanique analytique, Série 6

Assistants et tuteurs :

jeanne.bourgeois@epfl.ch lorenzo.fioroni@epfl.ch leo.goutte@epfl.ch
luca-stefan.dugaiasu@epfl.ch filippo.ferrari@epfl.ch mathias.findrihan@epfl.ch
nathan.brunet@epfl.ch jonas.daverio@epfl.ch remi.thomas@epfl.ch

Exercice 1 : Chaînette avec masse ponctuelle

On considère une corde flexible, inextensible, de densité linéique uniforme ρ (poids linéique $w = \rho g$), suspendue entre deux points fixes

$$A(x_A, y_A), \qquad B(x_B, y_B),$$

dans un plan vertical (x, y). La corde a une longueur totale ℓ (donnée) et est décrite par un graphe $y = y(x)$ sur $[x_A, x_B]$ avec $y(x_A) = y_A$, $y(x_B) = y_B$. Une masse ponctuelle m est attachée au point d'abscisse imposée $x = x_* \in (x_A, x_B)$; son ordonnée $y_* := y(x_*)$ est a priori inconnue.

Déterminer la forme d'équilibre $y(x)$ comme minimisant de l'énergie potentielle totale, sous la contrainte que la longueur totale de la corde est ℓ. En particulier :

1. **Fonctionnel.** En utilisant le théorème des extremums liés, introduire un multiplicateur de Lagrange $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et écrire le fonctionnel non contraint $\mathcal{J}[y]$ dont le minimum correspond à minimiser l'énergie potentielle sous la contrainte de la longueur totale de la corde.
2. **Équations d'Euler–Lagrange hors du point chargé.** Ecrire les équations d'Euler–Lagrange sur les intervalles $[x_A, x_*)$ et $(x_*, x_B]$. Montrer que les solutions, à gauche et à droite du point chargé, sont données par deux chaînettes (même paramètre a) :

$$y_L(x) = C_L + a\cosh\left(\frac{x - x_{0,L}}{a}\right), \quad y_R(x) = C_R + a\cosh\left(\frac{x - x_{0,R}}{a}\right).$$

   Indication : Chercher une intégrale première du mouvement, c.-à-d. une quantité conservée sur chaque sous-intervalle.
3. **Condition de saut au point x_*.** La masse en x_* va produire une discontinuité de la dérivée $y'(x)$ (mais y reste continu). Montrer que cette discontinuité impose une condition de saut pour le moment conjugué à la coordonnée y. En déduire que la composante verticale des tensions juste à gauche et à droite du nœud s'additionnent pour équilibrer le poids mg, tandis que la composante horizontale reste la même de part et d'autre de la masse m.
4. **Conditions aux bords et continuité.** Imposer

$$y(x_A) = y_A, \qquad y(x_B) = y_B, \qquad y(x_*^-) = y(x_*^+) =: y_*,$$

   Montrer que les inconnues $\big(a,\ x_{0,L},\ x_{0,R},\ C_L,\ C_R,\ y_*,\ \lambda_0\big)$ sont déterminées par :
   - les deux équations de bord $y(x_A) = y_A$, $y(x_B) = y_B$,

— la continuité $y_L(x_*) = y_R(x_*) = y_*$,
— la condition de saut au nœud,
— la contrainte de longueur $\mathcal{L}[y] = \ell$.

(On peut éliminer C_L, C_R via les conditions de bord et de continuité, puis résoudre numériquement pour $(a, x_{0,L}, x_{0,R}, y_*, \lambda_0)$.)

5. **Cas symétrique (application).** Dans le cas $x_A = -L/2$, $x_B = L/2$, $y_A = y_B = 0$ et $x_* = 0$, utiliser la symétrie pour poser

$$x_{0,L} = -d, \quad x_{0,R} = +d, \quad C_L = C_R = C,$$

et montrer que la condition de saut devient

$$2\,w\,a\,\sinh\!\left(\tfrac{d}{a}\right) = mg,$$

tandis que les appuis donnent $C = -a\cosh\big((L/2-d)/a\big)$ et la contrainte de longueur

$$\ell = 2a\left[\sinh\!\left(\tfrac{L/2-d}{a}\right) + \sinh\!\left(\tfrac{d}{a}\right)\right].$$

Conclure que (a, d) est déterminé de manière unique (numériquement), puis reconstruire $y(x)$.

Remarque pédagogique. Le terme localisé $mg\,y(x_*)$ peut être vu comme une contribution $\int mg\,y(x)\,\delta(x-x_*)\,dx$ au Lagrangien densitaire. La condition de saut pour le moment conjugué à y est l'avatar variationnel du bilan des forces au nœud ; elle encode la continuité de la composante horizontale de la tension et l'équilibre vertical avec la masse ponctuelle.

Exercice 2 : Principe de Fermat dans un milieu d'indice de réfraction variable

Un rayon lumineux se propage dans le plan (x, y) au sein d'un milieu dont l'indice de réfraction ne dépend que de l'altitude : $n = n(y)$. Le rayon relie deux points fixés (x_A, y_A) et (x_B, y_B) avec $x_B > x_A$. D'après le principe de Fermat, la trajectoire réelle $y(x)$ minimise la longueur optique

$$\mathcal{S}[y] \;=\; \int_{x_A}^{x_B} F(y(x), y'(x), x)\,dx. \tag{1}$$

1. **Équation d'Euler–Lagrange.** Écrire le fonctionnel $F(y, y', x)$, en se rappelant que dans chaque déplacement infinitésimal ds la longueur optique est donnée par nds. Dériver l'équation d'Euler–Lagrange pour $y(x)$.
2. **Identité de Beltrami et loi de Snell locale.** Montrer qu'il existe une intégrale première qui implique une loi de conservation menant à une forme locale de la loi de Snell dans un gradient d'indice.
3. **Cas $n(y) = n_0(1 + \alpha y)$.** Résoudre l'équation différentielle obtenue pour $y(x)$ dans le cas $n(y) = n_0(1 + \alpha y)$, en imposant les conditions aux bords (x_A, y_A) et (x_B, y_B). Indication : exprimer y' à partir de l'intégrale première, puis intégrer.
4. **Limite homogène.** Discuter la limite $\alpha \to 0$ et retrouver que la trajectoire est une droite dans un milieu homogène.

5. **Limite de faible courbure et mirage atmosphérique (air).** On suppose un milieu stratifié horizontalement $n = n(y)$, avec une pente faible $y'(x) \ll 1$. Montrer que, au premier ordre,

$$y''(x) \;\approx\; \frac{1}{n}\,\frac{dn}{dy} \;\equiv\; \kappa, \tag{2}$$

de sorte que le rayon est localement parabolique :

$$y(x) \;\approx\; y_0 + \theta_0\,x + \tfrac{1}{2}\,\kappa\,x^2. \tag{3}$$

Pour un rayon initialement horizontal à l'observateur ($\theta_0 = 0$), la déviation verticale après une portée horizontale L vaut

$$\Delta y \;\approx\; \tfrac{1}{2}\,\kappa\,L^2. \tag{4}$$

Relier $n(y)$ au gradient de température. Pour l'air sec, on adopte le modèle standard de réfractivité

$$n - 1 \;\approx\; 77.6 \times 10^{-6}\,\frac{P}{T} \qquad \text{(avec } P \text{ en hPa et } T \text{ en K).} \tag{5}$$

On fait les hypothèses hydrostatique et de gaz parfait,

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g, \qquad \rho = \frac{P}{RT} \quad (R = 287\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}), \tag{6}$$

et on suppose un gradient de température (lapse rate) constant $\Gamma = \frac{dT}{dy}$ (en $\mathrm{K\,m^{-1}}$). En utilisant les conditions au bord de la mer $P = 1013$ hPa, $T = 293$ K (20°C), $g = 9.81$ m/s^2, calculer κ et Δy pour une cible à distance horizontale $L = 1000$ m. Essayez avec les trois conditions de lapse rate

$$\begin{aligned}
&\text{Standard :}\quad \Gamma = -6.5\ \text{K/km} = -0.0065\ \text{K/m},\\
&\text{Isotherme :}\quad \Gamma = 0,\\
&\text{Inversion :}\quad \Gamma = +10\ \text{K/km} = +0.01\ \text{K/m}.
\end{aligned}$$

Présenter un court commentaire reliant le signe de κ aux conditions de looming/mirage (mirage d'inversion vs. mirage inférieur). Remarque : le signe négatif indique une courbure vers le bas du rayon ; la hauteur apparente est donc accrue de $|\Delta y|$.